

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Д. Харченко (ГИУСТ БГУ)

Научный руководитель:

кандидат физ.-мат. наук, доцент Л.Г. Третьякова

Дифференциальное исчисление – широко применяемый для экономического анализа математический аппарат. В каком направлении изменится доход государства при увеличении налогов или при введении импортных пошлин? Увеличится или уменьшится выручка фирмы при повышении цены на ее продукцию? Для решения подобных задач должны быть построены функции связи входящих в них переменных, которые затем изучаются с помощью методов дифференциального исчисления.

Важный раздел методов дифференциального исчисления, используемых в экономике, называется методами предельного анализа. Предельный анализ в экономике – совокупность приемов исследования изменяющихся величин затрат или результатов при изменениях объемов производства, потребления и т. п. на основе анализа их предельных значений. Предельный показатель функции $y = f(x)$ – это ее производная.

Итак, рассмотрим понятие предельных величин подробнее. Пусть функция $I = I(x)$ характеризует зависимость издержек производства от количества выпускаемой продукции.

Предположим, что количество выпускаемой продукции увеличится на Δx , т. е. равно $x + \Delta x$, соответствующие издержки производства будут равны $I(x + \Delta x)$. Тогда приращению продукции Δx соответствует приращение издержек производства продукции

$$I(x + \Delta x) - I(x) = \Delta I(x).$$

Среднее приращение издержек производства – это величина постоянных издержек, приходящихся на единицу продукции. Если перейти к пределу, когда $\Delta x \rightarrow 0$, то получим значение предельных издержек производства (предельные издержки – это прирост издержек, вызванный увеличением объема выпуска на единицу продукции)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = I'.$$

Пример 1. Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x выражается функцией $y = 50x - 0,05x^2$ (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

Решение. Функция средних издержек выражается отношением

$$y(x)_{\text{ср}} = \frac{y}{x} = 50 - 0,05x,$$

при $x = 10$ $y_{\text{ср}}(10) = 50 - 0,05 \cdot 10^2 = 45$ (ден. ед.).

Функция предельных издержек выражается производной $y'(x) = (50x - 0,05x^2)' = 50 - 0,1x$, при $x = 10$ предельные издержки составляют $y'(10) = 50 - 0,1 \cdot 10^2 = 35$ (ден. ед.).

Ответ. Средние издержки – 45 (ден. ед.), предельные издержки – 35 (ден. ед.).

Задача на экстремум. Пример 2. Функция суточного спроса Q на мороженое (тыс. шт.) в зависимости от цены P за одну порцию (руб.) имеет вид $Q = 3 - \sqrt{P}$. Эффективная область «работы» этой формулы от 1 до 9. При какой цене за порцию мороженого совокупная выручка будет максимальной?

Решение. Совокупная выручка определяется из соотношения $TR = QP$, где Q – количество реализованных порций мороженого (тыс. шт.); P – цена за одну порцию (руб.). Тогда функция совокупной выручки в зависимости от цены примет вид $TR = (3 - \sqrt{P})P$. Требуется найти наибольшее значение этой функции на отрезке $[1; 9]$.

Для этого находим критические точки функции, принадлежащие данному отрезку: $TR(3 - \frac{3}{2}\sqrt{P})$; $P = 4$. Критическая точка $P = 4$. Вычислим значение функции совокупной выручки на концах интервала и в критической точке: $TR(1) = 2$, $TR(4) = 4$, $TR(9) = 0$.

Следовательно, при цене 4 руб. за порцию совокупная выручка будет максимальной и составит 4 тыс. руб.

Эластичность и ее применение в экономическом анализе. Эластичность – это численная характеристика изменения одного показателя к другому и показывающая, на сколько процентов изменится первый показатель при изменении второго на один процент.

$$E_x = \frac{x}{y} \cdot y' \text{ – формула эластичности.}$$

Пример 3. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выражается функцией $y = -0,5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

Решение.

$$E_x(y) = (-0,5x + 80)' \cdot \frac{x}{-0,5x + 80} = \frac{-0,5x}{-0,5x + 80} = \frac{x}{x - 160},$$

при $x = 60$ $E_x(y) = 60$.

То есть при выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1 % приведет к снижению себестоимости на 0,6 %.

Литература

1. Минюк, С.А. Высшая математика для экономистов: учебник / С.А. Минюк, С.А. Самаль, Л.И. Шевченко. – 2-е изд., испр. – Минск: Элайда, 2007. – 512 с.
2. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / под ред. В.И. Ермакова. – 2-е изд., испр. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 575 с.

3. *Красс, М.С.* Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2005. – 230 с.

4. *Кремер, Н.Ш.* Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер [и др.]; под ред. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2004. – 471 с.